

**Secondo compito**

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

**Esercizio 1** *Gas ideale di Fermioni in 2 dimensioni*

Si consideri dei fermioni di spin  $1/2$ , liberi e non interagenti in 2 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{2}{A} \sum_{\mathbf{p}} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)$$

2. Si calcoli la densità media  $\rho = \langle N \rangle / A$  in termini della fugacità  $z$  e della lunghezza d'onda termica  $\lambda$ . Si ricorda che  $\lambda^2 = h^2 / (2\pi m K_B T)$ .
3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo  $\beta P$  in termini di  $z$  e  $\lambda$ . [Si usi il fatto che  $\int_0^\infty dt \log(1 + z e^{-t}) = f_2(z)$ ; per  $z < 1$  si ha che  $f_2(z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} z^n / n^2$ .
4. Utilizzando il risultato del punto 2 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori di  $\lambda^2 \rho$ , per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato, calcolata al punto precedente.

## Esercizio 2 Gas ideale di Bosoni in 4 dimensioni

Si consideri un ipotetico sistema di Bosoni di spin 0 liberi e non interagenti in 4 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \frac{p^2}{2m}),$$

ove  $V$  è il volume 4-dimensionale e l'angolo solido in 4 dimensioni è  $\Omega_4 = \pi^2/2$ .

2. Si calcoli la densità media  $\rho = \langle N \rangle / V$  in termini della fugacità  $z$  e della lunghezza d'onda termica  $\lambda$ . Si ricorda che  $\lambda^2 = h^2 / (2\pi m K_B T)$  e si includa il termine corrispondente a  $\mathbf{p} = 0$ . Si tenga conto del fatto che  $\int_0^\infty dt t z e^{-t} / (1 - z e^{-t}) = g_2(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n / n^2$ .
3. Sfruttando il fatto che  $g_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$  è finita, si mostri come in 4 dimensioni ci sia condensazione di Bose-Einstein e si ricavi l'espressione del valore critico  $y_c$  del parametro di degenerazione  $y = \lambda^4 \rho$  in della funzione  $g_2$ .
4. Supponendo di operare a densità costante si trovi l'espressione che dà la frazione di condensato per  $T < T_c$  (ovvero per  $y > y_c$ , e la densità  $\rho$  fissata), in funzione di  $T/T_c$  e se ne faccia un disegno qualitativo.