$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = a\ b\ \cos 45° + a\ c\ \cos 30° =$$
$$= \frac{a\,b\sqrt{2}}{2} + \frac{a\,c\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}\left(b\ \sqrt{2} + c\ \sqrt{3}\right)$$

Per il calcolo del prodotto vettoriale, tenendo conto della proprietà distributiva rispetto alla somma, si ha:

$$\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

in cui i due vettori $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{c}$ sono paralleli ed equiversi, essendo entrambi diretti ortogonalmente al piano del foglio nel verso uscente; inoltre i loro moduli sono:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\ b \sin 45° = \frac{a\ b\ \sqrt{2}}{2}$$
$$|\vec{a} \times \vec{c}| = a\ c \sin 30° = \frac{a\ c}{2}$$

Da questo segue che il prodotto vettoriale richiesto è anch'esso uscente perpendicolarmente dal piano del foglio e ha modulo:

$$p = \frac{a\ b\ \sqrt{2}}{2} + \frac{a\ c}{2} = \frac{a}{2}\left(b\ \sqrt{2} + c\right)$$

uguale alla somma dei moduli dei due vettori $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{c}$.

▶ **41** ▮▮ La lancetta delle ore di un orologio è lunga 1 cm. Rappresentare graficamente gli spostamenti dell'estremità della lancetta tra le ore 12 e le ore 14 e tra le 14 e le 16.
Fissato un sistema cartesiano con l'origine nel centro dell'orologio, l'asse x diretto verso le 15 e l'asse y verso le 12, calcolare le componenti cartesiane degli spostamenti precedenti e il loro modulo.
Calcolare inoltre, per entrambi gli spostamenti, la lunghezza del cammino percorso dalla punta della lancetta lungo la sua traiettoria.

[1° spostamento: $s_x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm; $s_y = -0{,}5$ cm; $s = 1$ cm;

2° spostamento: $s_x = 0$; $s_y = -1$ cm; $s = 1$ cm; $\frac{\pi}{3}$ cm]

▶ **42** ▮▮ Rispetto a un sistema di assi cartesiani Oxy vengono assegnati i vettori $\vec{a}$ (1,1) e $\vec{b}$ (2,0). Si consideri un secondo sistema di assi cartesiani $Ox'y'$, anch'esso con origine in O, ma con gli assi ruotati di 45° in senso antiorario, cioè con x' a 45° rispetto a x e y' a 45° rispetto a y.
Quali sono le componenti dei due vettori rispetto a questo secondo sistema? I loro moduli dipendono dalla scelta del sistema di assi? E il prodotto scalare $\vec{a} \times \vec{b}$? Giustificare la risposta.

[$\vec{a}(\sqrt{2},\ 0)$; $\vec{b}(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; no; no]

▶ **43** ▮▮ Un tedoforo corre con la fiaccola in mano alla velocità di 5,0 m/s in direzione Nord. Si alza un vento da Est che ha una velocità di 3,0 m/s. Quale sarà la direzione del fumo? Converrà portare la fiaccola con la mano destra o con la sinistra?

Guida alla soluzione
Se la fiaccola fosse ferma, il fumo si sposterebbe nella direzione verso la quale lo spinge il vento, cioè verso Ovest.
D'altro canto, se il tedoforo corresse verso Nord in assenza di vento, il fumo si sposterebbe nella direzione opposta a quella del moto, cioè verso Sud. Infatti, se la fiaccola è in movimento con una certa velocità $\vec{v}$ attraverso l'aria ferma, essa risente dello stesso spostamento d'aria che avvertirebbe se, essendo ferma, l'aria si muovesse con la velocità opposta, cioè $-\vec{v}$.
Nel caso proposto dal problema, l'effetto del vento e quello del movimento della fiaccola attraverso l'aria si sovrappongono e la direzione del fumo coincide con quella della velocità risultante con cui l'aria si sposta *rispetto alla fiaccola*.
Detta $\vec{v}_v$ la velocità del vento e $\vec{v}_t$ la velocità del tedoforo, la direzione cercata è allora quella del vettore $\vec{v}_v - \vec{v}_t$.

[Ovest 59° Sud; con la sinistra]

▶ **44** ▮▮ La bandiera issata sul più alto pennone di una barca sventola sotto un maestrale (vento da Nord-Ovest) che ha una velocità di 2,0 m/s. La barca affronta il mare facendo rotta verso Sud alla velocità di 12 nodi (un nodo equivale a 1,8 km/h). In quale direzione si disporrà la bandiera?

[Est 73° Nord]