Particelle identiche in M.Q.: simmetria degli stati

Richiamo da Mecc. Stat. e Fis. Mod.:
In M.CL. è possibile distinguere 2 particelle, in M.Q. **no**

- **Postulato di indistinguibilità delle particelle**

- **Tutti gli stati** (e in modo particolare gli autostati di H) **di un sistema di due particelle identiche sono simmetrici o antisimmetrici per scambio delle due variabili**

- Se un autostato è simmetrico o antisimmetrico, **tutti gli autostati hanno lo stesso carattere di simmetria o antisimmetria** (per il principio di sovrapposizione)

- Il carattere di simmetria o antisimmetria **non dipende dal tempo**

- Generalizzazione nel caso di N particelle identiche: se due particelle danno stati simmetrici per scambio, una terza particella identica alle prime due non cambia la simmetria . . .

- Il carattere di simmetria dipende dallo **spin** delle particelle

- Particelle composte: es. il nucleo, si comporta come **bosone** o **fermione** a seconda che sia formato da un numero **pari** o **dispari** di nucleoni (protoni e neutroni, entrambi fermioni)

Un po' di formalismo: operatori di scambio

NB.: l'equazione di Schroedinger di per sè non tiene conto del **postulato di indistinguibilità**, che va considerato **in aggiunta** nella risoluzione $\Rightarrow$ COME ?

- Introduciamo l'**operatore di scambio** $\mathcal{P}_{ij}$:

$$\mathcal{P}_{ij}\Psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2, \ldots, \mathbf{r}_i\sigma_i, \ldots, \mathbf{r}_j\sigma_j, \ldots, \mathbf{r}_N\sigma_N) = \Psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2, \ldots, \mathbf{r}_j\sigma_j, \ldots, \mathbf{r}_i\sigma_i, \ldots, \mathbf{r}_N\sigma_N)$$

- $\mathcal{P}_{ij}^2 = \mathcal{I}$ per q.que (i, j) $\Rightarrow$ autovalori: $\pm\mathbf{1}$

- $[H, \mathcal{P}_{ij}]$**=0**, ma $[\mathcal{P}_{ij}, \mathcal{P}_{il}]$=0 solo se $l = j$ $\Rightarrow$ **in generale impossibile diagonalizzare simultaneamente tutti gli operatori di scambio e l'hamiltoniana**

- Più precisamente: Sistema di N particelle identiche $\Rightarrow \dfrac{N(N-1)}{2}$ operatori di scambio diversi quindi:
  - per $N = 2$ esiste un solo operatore di scambio ($\mathcal{P}_{12} \equiv \mathcal{P}_{21}$) $\Rightarrow$ posso trovare un set completo di autostati di H a simmetria definita
  - per $N > 2$ più operatori di scambio, impossibile trovare un set completo di autostati di H a simmetria definita $\Rightarrow$
    autostati simm., antisimm., misti, non-autostati dei $\mathcal{P}_{ij}$:
    ma il set completo di autostati di H corrisponde allo **spazio di Hilbert matematico, non fisico**

Spazio di Hilbert matematico e sottospazio fisico

Hamiltoniana di N particelle identiche:

$$H(N) = \sum_{i=1}^{N} h(i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} U_{ij}$$

Dei possibili autostati di H, interessano gli stati fisici, NON lo spazio di Hilbert matematico. In particolare nel caso degli e$^-$ (fermioni): **una base per gli stati fisici sono solo gli autostati di H antisimmetrici**

- Se in generale non esiste un set completo di autostati comuni a tutti i $\mathcal{P}_{ij}$, ...

- ...è possibile trovare **alcuni autostati comuni di H e di tutti i $\mathcal{P}_{ij}$**
  (due operatori non commutanti non hanno un set completo di autostati in comune, ma possono avere alcuni autostati comuni)

- **Come ?**
  - trovare tutte le soluzioni di $H(N)$ e poi selezionare
  - **costruire una base nel sottospazio fisico, e risolvere l'eq. di Schroedinger in quel sotto-spazio**

Stati fisici di fermioni identici

Come costruire una base nel sottospazio di N fermioni?
Nel caso di **particelle non interagenti** ($U_{ij} = 0$) è
$H(N) = \sum_{i=1}^{N} h(i)$, con $H\Psi = E\Psi$.

Possibile separazione di variabili:
$\Psi = \Pi f_\ell$, con $h f_\ell = \varepsilon_\ell f_\ell$; $E = \sum_\ell \varepsilon_\ell$

NB 1: $\Psi = \Pi f_\ell$ **non** è in generale uno stato fisico.
Considerare però l'**operatore di antisimmetrizzazione**:

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i=1}^{N!} (-1)^{\lambda_i} \mathcal{P}_i}$$

con $\mathcal{P}_\rangle$ un operatore di scambio (permutazione),
λ_i parità della permutazione.

L'applicazione di $\mathcal{A}$ all'autostato (matematico) di H dà un possibile stato fisico di fermioni:

$$\boxed{|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle \equiv \mathcal{A}[f_{n_1}(\mathbf{r}_1\sigma_1) \cdot f_{n_2}(\mathbf{r}_2\sigma_2) \ldots \cdot f_{n_N}(\mathbf{r}_N\sigma_N)]}$$

NB 2: è combinazione lineare di $N!$ termini in cui le particelle occupano a turno tutti gli stati, da n_1 a n_N. Allora la notazione $|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$ è sufficiente (non serve specificare le particelle!)

Determinanti di Slater

$$\boxed{|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle \equiv \mathcal{A}[f_{n_1}(\mathbf{r}_1\sigma_1) \cdot f_{n_2}(\mathbf{r}_2\sigma_2) \ldots \cdot f_{n_N}(\mathbf{r}_N\sigma_N)]}$$

Scrivibile anche come **determinante di Slater**:

$$\boxed{|n_1, \ldots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} det \begin{vmatrix} f_{n_1}(\mathbf{r}_1\sigma_1) & f_{n_1}(\mathbf{r}_2\sigma_2) & \ldots & f_{n_1}(\mathbf{r}_N\sigma_N) \\ f_{n_2}(\mathbf{r}_1\sigma_1) & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & & \\ f_{n_N}(\mathbf{r}_1\sigma_1) & \ldots & \ldots & f_{n_N}(\mathbf{r}_N\sigma_N) \end{vmatrix}}$$

- Se le f_ℓ sono normalizzate, lo sono anche i det. di Slater costruiti sull'N-pla di f_ℓ
- Non ha importanza quale sia la sequenza delle particelle nel riempimento dell'N-pla di partenza
- Gli stati $|n_1, n_2 \ldots, n_N\rangle$ sono ortogonali e costituiscono una **base nel sottospazio fisico dei fermioni**, al variare delle N-ple.