Metodi Matematici della Fisica

Scritto V A.A. 2016-2017

1. Si consideri la funzione di variabile complessa z
$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{i\pi z}} \; . \tag{1}$$
   (a) Si trovino i suoi punti singolari e si caratterizzi l'andamento di $f(z)$ in un loro intorno. Si discutano le proprietà del punto all'infinito.
   (b) Si calcolino i residui di $f(z)$ nei suoi punti singolari.
   (c) Sia Γ_R una curva chiusa il cui interno contiene il segmento reale $[-R, R]$ e tale che $\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Si usi questo fatto per sommare la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

2. Si consideri lo spazio di Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$ e la base ortonormale completa delle funzioni esponenziali $\psi_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}$.
   (a) Si trovino i coefficienti di Fourier di $\psi(x) = \begin{cases} a & 0 \le x \le \pi \\ 0 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$.
   (b) Si usi il risultato precedente per sommare la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
   (c) Usando la base ortonormale $\{|\psi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$, si risolva l'equazione differenziale
$$\partial_t |\psi_t\rangle \;=\; D\,\hat{p}^2 |\psi_t\rangle \;, \quad |\psi_{t=0}\rangle = |\psi\rangle \;,$$
   con $D > 0$, $|\psi_t\rangle \in L^2([-\pi,\pi])$ e $(\hat{p}\psi)(x) = -i\partial_x\psi(x)$.

3. Sia $\hat{P}_n$ l'operatore lineare su $L^2([-\pi,\pi])$ definito da
$$(\hat{P}\psi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-in(x-y)}\,\psi(y) \; .$$
   (a) Si dimostri che $\hat{P}_n$ è autoaggiunto.
   (b) Si dimostri che $\hat{P}_n^2 = \hat{P}_n$.
   (c) Si dimostri che $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-in(x-y)} = \delta(x-y)$ su $[-\pi,\pi]$.