Metodi Matematici della Fisica

Scritto IV A.A. 2016-2017

1. Si consideri la funzione di variabile complessa z

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\sinh z} \ . \tag{1}$$

   (a) Si trovino i suoi punti singolari e se ne calcolino i residui.

   (b) Si dimostri che, per $0 \leq y \leq b$ reale,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^b \mathrm{d}y f(\pm R + iy) = 0 \ .$$

   (c) Usando il punto precedente, si calcoli $I = \mathrm{P.V.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{e}^{ix}}{\sinh x}$ su un percorso rettangolare nel semipiano superiore che non contenga al suo interno alcun punto singolare di $f(z)$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + a\, f(x) = F(x) \ , \tag{2}$$

   con $a > 0$ e $F(x)$ funzione continua per $x \geq 0$ con $F(x) = 0$ per $x \leq 0$.

   (a) Si dimostri che, se $G(x)$ risolve $\dfrac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} + a\, G(x) = \delta(x)$, allora $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, G(x-y)\, F(y)$ risolve l'equazione (2).

   (b) Si trovi $G(x)$ usando $\widetilde{G}(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ipx} G(x)$.

   (c) Si usi $G(x)$ per scrivere la soluzione più generale dell'equazione (2) con condizione iniziale $f(0) = f$.

3. Sia X un operatore lineare $X : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$.

   (a) Si dimostri che la traccia di X, $\mathrm{Tr}(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j | X \phi_j \rangle$, non dipende dalla base ortonormale $\{|\phi_j\rangle\}_{j=1}^n$ usata per calcolarla.

   (b) Si dimostri che, se $X = X^\dagger$, allora la traccia è la somma dei suoi autovalori.

   (c) Si dimostri che se, $X = X^\dagger$, allora $\mathrm{Tr} X \geq \|X\|$.