Metodi Matematici della Fisica

Scritto II A.A. 2016-2017

1. Si considerino le funzioni complesse su $\mathbb{C}$

$$f_1(z) = \log(1-z) \ , \quad f_2(z) = \log(1+z) \ , \quad f_3(z) = \log(1-z^2) \ .$$

   (a) Specificando le opportune diramazioni e il raggio massimo di convergenza uniforme, se ne scrivano gli sviluppi in serie di Taylor intorno a $z = 0$.

   (b) Dalle serie di $f_{1,2}(z)$ si ritrovi quella di $f_3(z)$.

   (c) Usando la sua serie di Taylor, si derivi $f_3(z)$ all'interno del cerchio di convergenza e si sommi esplicitamente la serie ottenuta verificandone la correttezza.

2. Si consideri l'integrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+a)} \ , \qquad a > 0 \ .$$

   (a) Si discuta l'esistenza di $I(a)$.

   (b) Si calcoli l'integrale con i metodi dell'analisi complessa monodromizzando la funzione integranda con $0 \leq arg(z) < 2\pi$.

   (c) Verificare che il risultato non cambia con $2\pi \leq arg(z) < 4\pi$.

3. Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^2$ e la matrice di Pauli $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Si scriva la decomposizione spettrale $\sigma_x = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ in termini degli autovalori λ_1 e λ_2 di σ_x dando l'espressione matriciale degli autoproiettori ortogonali P_1 e P_2.

   (b) Considerando gli sviluppi in serie del primo esercizio si scriva la decomposizione spettrale dell'operatore $X = \log\left(\mathbf{1} + \frac{1}{2}\sigma_x\right)$, dove $\mathbf{1}$ denota la matrice identità che agisce su $\mathbb{C}^2$.

   (c) Spiegare perchè il ragionamento al punto precedente non si può applicare all'operatore $Y = \log\left(\mathbf{1} + \sigma_x\right)$.