Metodi Matematici della Fisica

Scritto I A.A. 2016-2017

1. Sia $f(z)$ una funzione analitica all'interno e sulla circonferenza $C_R(0)$ di raggio R e centro $z = 0$ e sia z_0 contenuto all'interno di $C_R(0)$.

   (a) Dimostrare che
   $$\oint_{C_R(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{z - R^2/z_0} = 0 \ .$$

   (b) Giustificare il fatto che, percorrendo la circonferenza in senso orario,
   $$-\oint_{C_R(0)} \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{z - R^2/z_0} = 0 \ ,$$
   nonostante la funzione integranda non sia analitica "all'interno" della circonferenza, $\{z : |z| > R\}$, corrispondente al senso di percorrenza.

   (c) Verificare le considerazioni fatte al punto precedente nei casi $f(z) = 1$ e $f(z) = \dfrac{1}{z - 2R}$

2. Si consideri l'integrale
   $$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x + a} \ , \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

   (a) Si discuta l'esistenza dell'integrale al variare di a.

   (b) Si calcoli l'integrale con i metodi dell'analisi complessa.

   (c) Si giustifichino i risultati ottenuti.

3. Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^N$ con una sua base ortonormale composta dai vettori $|\ell\rangle$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Sia
   $$|\psi\rangle = \sum_{\ell=0}^{N-1} \psi_\ell \, |\ell\rangle \ , \qquad \psi_\ell = \langle \ell | \psi \rangle \ ,$$

un generico vettore dello spazio di Hilbert sviluppato sulla data base e sia $|\ell\rangle\langle\ell+1|$ l'operatore lineare su $\mathbb{C}^N$ definito da

$$\Big(|\ell\rangle\langle\ell+1|\Big)|\psi\rangle = \psi_{\ell+1}\,|\ell\rangle\ .$$

(a) Si dimostri che l'aggiunto di $|\ell\rangle\langle\ell+1|$ è $|\ell+1\rangle\langle\ell|$.

(b) Si consideri l'operatore

$$U = \sum_{\ell=0}^{N-1} |\ell\rangle\langle\ell+1|\ ,$$

dove la somma $\ell+1$ va intesa modulo N; cioè $\ell+pN=\ell$ per ogni $0\le\ell\le N-1$ e $p\in\mathbb{Z}$. Ad esempio $|(N-1)+1\rangle = |N\rangle = |0\rangle$. Si provi che U è unitario, $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$ e, studiando U^p, $p=0,1,2,\ldots$, che $U^N=\mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ denota la matrice identica.

(c) Usando i risultati precedenti si provi che gli autovalori λ_j di U sono pure fasi e li si ricavi esplicitamente assieme ai corrispondenti autovettori $|\phi_j\rangle$ tali che $U|\phi_j\rangle = \lambda_j|\phi_j\rangle$, dimostrando infine l'ortogonalità di questi ultimi.