Metodi Matematici della Fisica

Scritto III A.A. 2016-2017

1. Si consideri la funzione di variabile complessa z

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z)^\alpha} \; , \tag{1}$$

con α anch'essa costante complessa.

   (a) Si scelga una diramazione analitica nel cerchio di centro $z = 0$ e raggio $r < 1$ e si sviluppi la funzione in serie di Laurent in questo dominio, scrivendone gli elementi fino all'ordine 2.

   (b) Si calcolino i residui di $f(z)$ in $z = 0$ e all'infinito.

   (c) Si studi $f(z)$ come funzione $g(\alpha)$ di $\alpha \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ fissato, e se ne calcolino i residui in $\alpha = 0$ e $\alpha = \infty$.

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} + a\, f(z) = 0 \; , \tag{2}$$

con a costante complessa.

   (a) Si cerchi una soluzione della forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ trovando una relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n.

   (b) Si sommi esplicitamente la serie e si verifichi che la funzione ottenuta risolve l'equazione (2).

   (c) Scegliere la costante a in modo che la funzione $f(z)$ soddisfi $f(0) = f(1)$.

3. Sia $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base ortonormale in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale $\mathbb{H}$ e A l'operatore lineare su $\mathbb{H}$ definito da

$$A|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \; . \tag{3}$$

   (a) Se ne deduca l'azione $A^\dagger|\phi_n\rangle$ dell'aggiunto di A.

   (b) Si trovino autovalori ed autovettori di $A^\dagger A$.

   (c) Si dimostri che $A^\dagger A$ non può essere un operatore limitato.