Metodi Matematici della Fisica

Scritto VI A.A. 2015-2016

1. Si scriva in forma esplicita la funzione olomorfa $f(z)$ con un polo semplice di residuo 4 in $z = 3$ e tale che
$$f(0) = 0 \ , \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 2 \ .$$

2. Usando lo sviluppo in serie dell'esponenziale, si scriva la serie di Laurent della funzione Gamma di Eulero, esplicitando la forma integrale dei coefficienti dell'espansione, nell'intorno di 1) $z = 1$ e 2) $z = 0$.

3. Si considerino due operatori lineari a e $a^\dagger$ su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ che soddisfano le seguenti relazioni (di anticommutazione)
$$a\,a^\dagger + a^\dagger\,a = \mathbf{1} \ , \qquad a^2 = (a^\dagger)^2 = 0 \ .$$
   - Si provi che i seguenti due operatori,
   $$p = \frac{\mathbf{1} + a + a^\dagger}{2} \ , \quad q = \frac{\mathbf{1} - a - a^\dagger}{2} \ ,$$
   sono proiettori ortogonali;
   - si trovino gli autovalori dell'operatore $E = \mathrm{e}^X$, dove
   $$X = \frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathbf{1} + \frac{\alpha-\beta}{2}(a + a^\dagger) \ ,$$
   con α e β parametri reali.