

# Metodi Matematici della Fisica

## Scritto V A.A. 2015-2016

1. Si consideri la funzione di variabile complessa  $f(z) = z^t$ , con  $t$  un qualunque parametro complesso e la si sviluppi in serie di Laurent in un opportuno intorno di  $z = 1$ . Si discuta il raggio di convergenza uniforme e la struttura della serie in funzione del parametro  $t$ .
2. Si calcoli la funzione Gamma di Euler  $\Gamma(z)$  nel punto  $z = -5/2$ .
3. Dato lo spazio di Hilbert  $\mathbb{C}^d$ , con  $d$  intero  $> 1$  e fissata una base ortonormale  $\{|j\rangle\}_{k=1}^d$ , si consideri l'operatore lineare

$$X = \sum_{k=1}^d |k \oplus 1\rangle \langle k| ,$$

con  $\oplus$  la somma modulo  $d$  tale che  $k \oplus nd = k$  per ogni  $1 \leq k \leq d$  e intero  $n \in \mathbb{Z}$ . Si dimostri che

$$X^\dagger = \sum_{k=1}^d |k \ominus 1\rangle \langle k| , \quad XX^\dagger = X^\dagger X = 1 , \quad X^d = 1 ,$$

dove  $k \ominus 1$  denota la sottrazione modulo  $d$ . Usando i risultati precedenti, si trovino gli autostati di  $X$ .