Metodi Matematici della Fisica

Scritto IV A.A. 2015-2016

1. Sia $f(z)$ funzione olomorfa in un dominio $\mathcal{D}$; usando il teorema di Morera, trovare un dominio di olomorfia di $f^*(z^*)$.

2. Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}t \, \frac{1}{1+\sin^2 t}$$

applicando il teorema dei residui ad un'opportuna funzione olomorfa $f(z)$ con al più poli semplici.

3. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert con $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{D}$ un set di vettori ortonormali. Si consideri il sottospazio lineare $\mathbb{K}_n$ generato da $\{|\psi_j\rangle\}_{j=1}^{n}$; usando il proiettore $P_{\mathbb{K}_n}$ su tale sottospazio, dimostrare che, se, dato $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$,

$$\|\psi\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle\psi_j|\psi\rangle|^2 \ , \quad 1 \leq n \leq D \ ,$$

allora $|\psi\rangle$ appartiene a $\mathbb{K}_n$.