Metodi Matematici della Fisica

Scritto II A.A. 2015-2016

1. Si consideri la funzione complessa
$$f(z) = \frac{(1+z)^3}{(z-1)^2}\ .$$
Si caratterizzi il punto all'infinito $z = \infty$ e si scriva la serie di Laurent della funzione intorno a tale punto nella variabile z, precisandone la regione di convergenza uniforme. **Dalla serie stessa** si calcoli il residuo all'infinito.

2. Si consideri l'equazione differenziale $y'(x) + y(x) = x$ con condizione iniziale $y(0) = 0$ e la si risolva tramite trasformata di Laplace.

3. Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ delle funzioni a quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$ e si fissi la base ortonormale delle funzioni $\phi_m(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{imx}}{\sqrt{2}}$, $m \in \mathbb{Z}$. Data la successione di funzioni $\psi_n(x) = \sqrt{n}\,\chi_{[-1/(2n),1/(2n)]}(x)$, con $n \in \mathbb{N}$ e
$$\chi_{[-1/(2n),1/(2n)]}(x) = \begin{cases} 1 \ldots x \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \\ \\ 0 \ldots x \notin [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \end{cases}\ ,$$
si dimostri, ragionando per assurdo e considerando la continuità di prodotti scalari e norme, che non esiste $\psi \in \mathbb{H}$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi$.