Metodi Matematici della Fisica

Scritto I A.A. 2015-2016

1. Si consideri la funzione complessa
$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{(z+1)^2} \ .$$
Si discuta il punto all'infinito e se ne trovi il relativo residuo.

2. Si consideri l'equazione differenziale $y''(x) = a$ con a reale e con condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$. La si risolva tramite trasformata di Laplace ponendo
$$\hat{y}(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-tz}\, y(x) \ , \qquad \mathcal{R}e(z) > x_0 \ ,$$
con x_0 un'opportuna ascissa di convergenza, e
$$y(x) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{x_0 - i\infty}^{x_0+\infty} \mathrm{d}z \, \mathrm{e}^{tz}\, \hat{y}(z) \ .$$

3. Si considerino gli operatori $\hat{p}$ e $\hat{q}$ sullo spazio di Hilbert delle funzioni $\psi(x)$ a quadrato sommabile su $\mathbb{R}$, definiti da
$$(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x) \ , \qquad (\hat{p}\psi)(x) = -i\psi'(x) \ .$$
Sapendo che il commutatore $[\hat{q}\,,\,\hat{p}] = i$ e che, in generale, dati tre operatori $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, vale $[\hat{A}\hat{B}\,,\,\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}\,,\,\hat{C}] + [\hat{A}\,,\,\hat{C}]\hat{B}$,
   - si dimostri per ricorsione che
   $$[\hat{p}^n\,,\,\hat{q}] = -\,i\,n\,\hat{p}^{n-1} \ ;$$
   - si usi il risultato precedente e il fatto che
   $$\mathrm{e}^{-ix\hat{p}}\,\mathrm{e}^{ix\hat{p}} = \mathrm{e}^{ix\hat{p}}\,\mathrm{e}^{-ix\hat{p}} = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ ,$$
   per dimostrare che
   $$\mathrm{e}^{ix\hat{p}}\,\hat{q}\,\mathrm{e}^{-ix\hat{p}} = \hat{q} + x \ .$$