Metodi Matematici della Fisica

Scritto IV A.A. 2014-2015

1. Si consideri la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = z^{\alpha}(z-1)^{\beta} \ , \tag{1}$$

con α e β esponenti **complessi**. Fissare le condizioni su z, α e β che permettono di espandere $f(z)$ in serie di Laurent attorno a 1) $z = 0$, 2) $z = 1$ e 3) $z = 1/2$ e ricavare le corrispondenti espansioni.

2. Si consideri l'integrale

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \ . \tag{2}$$

Lo si calcoli sotto le condizioni più generali cui devono sottostare i coefficienti α e β per applicare il metodo dei residui.

3. Sia T un operatore autoaggiunto, positivo, agente su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ con la seguente rappresentazione spettrale

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \, |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \ , \tag{3}$$

con $|\psi_n\rangle$ e t_n autovettori ed autovalori di T e con gli autovalori positivi così ordinati: $t_1 \geq t_2 \geq \ldots t_n \geq \ldots$. Si dimostrino le seguenti relazioni

$$t_1 = \|T\| \tag{4}$$

$$t_n = \sup_{\psi \perp \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\}} \|T\psi\| \ , \tag{5}$$

dove $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\}$ rappresenta il sottospazio generato dagli autovettori in parentesi.