Metodi Matematici della Fisica

Scritto III A.A. 2014-2015

1. Si ricavi, giustificando i vari passaggi, il seguente risultato

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\alpha\, t} = \frac{1}{\alpha} \; , \qquad 0 \neq \alpha = |\alpha|\, \mathrm{e}^{i\phi} \; , \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \; . \tag{1}$$

2. Si usi il risultato precedente e le tecniche delle trasformate di Laplace per risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) \, + \, x(t) = \mathrm{e}^t \; , \qquad x(0) = 0 \; , \tag{2}$$

   indicando con $\widetilde{x}(z)$ la trasformata di Laplace

$$\widetilde{x}(z) \, = \, \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-z\, t}\, x(t) \; . \tag{3}$$

3. Siano $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ due vettori **normalizzati** di uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$. Esprimendo $|\psi\rangle$ come combinazione lineare di $|\phi\rangle$ e $|\phi^{\perp}\rangle$, dove $|\phi^{\perp}\rangle$ è il vettore normalizzato ortogonale a $|\phi\rangle$, si scriva il proiettore ortogonale sul sottospazio bidimensionale generato da $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ come combinazione lineare degli operatori $|\phi\rangle\langle\phi|$, $|\psi\rangle\langle\psi|$, $|\psi\rangle\langle\phi|$ e $|\phi\rangle\langle\psi|$.