Metodi Matematici della Fisica

Scritto I A.A. 2014-2015

1. Si identifichi il carattere delle singolarità isolate della funzione complessa
$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2(z^2+a^2)} \ , \quad z \in \mathbb{C} \ , \ a \geq 0 \ ,$$
e se ne calcolino i corrispondenti residui.

2. Si usi la formua di eulero per esprimere $\sin^2 x$ come parte reale di una funzione complessa di variabile reale x e si calcoli, con il metodo dei residui, l'integrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\sin^2 x}{x^2(x^2+a^2)} \ , \quad a \geq 0 \ .$$

3. Si consideri lo spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ delle successioni a quadrato sommabile $v = (v_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $v_n \in \mathbb{C}$, tali che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |v_n|^2 < \infty$. Dati gli operatori lineari su $\ell^2(\mathbb{Z})$ di spostamento a destra, R,ed a sinistra, L, definiti da
$$(Rv)_n = v_{n-1} \ , \qquad (Lv)_n = v_{n+1} \qquad \forall \ n \in \mathbb{Z} \ ,$$
si dimostri
   (a) che $R^\dagger = L$, $L^\dagger = R$;
   (b) che entrambi sono operatori unitari;
   (c) che R e L non possono avere autostati in $\ell^2(\mathbb{Z})$.