

Metodi Matematici della Fisica

Scritto V A.A. 2013-2014

1. Si studi il dominio di analiticità della seguente serie

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1)z^k \quad (1)$$

e la si sommi esplicitamente riducendo gli addendi a derivate di potenze di z .

2. Si calcoli il seguente integrale

$$I = \oint_{C_1(0)} dz \frac{z^3}{1+2z^4}, \quad (2)$$

dove $C_1(0)$ è la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario. Si controlli l'esattezza del valore di I così ottenuto calcolando l'integrale con la circonferenza percorsa in senso orario. (Suggerimento: nel primo caso, si usi la regola di de l'Hopital nel calcolo dei residui.)

3. Si consideri il seguente operatore lineare sullo spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$:

$$(T\psi)(x) = \frac{x+|x|}{2}\psi(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (3)$$

e la sua azione sul set ortonormale completo di funzioni esponenziali

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

È il set di funzioni $\{Te_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ anch'esso completo?