Metodi Matematici della Fisica

Scritto IV A.A. 2013-2014

1. Si studino zeri e singolarità della seguente funzione di variabile complessa
$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \; ; \tag{1}$$
e se ne calcolino i residui nelle singolarità polari.

2. Si consideri il quadrato Q_N di vertici
$$v_1 = (N + 1/2, i(N + 1/2)) \; , \; v_2 = (-(N + 1/2), i(N + 1/2))$$
$$v_3 = (-(N + 1/2), -i(N + 1/2)) \; , \; v_4 = (N + 1/2, -i(N + 1/2))$$
ed il seguente integrale:
$$I_N = \oint_{Q_N} \mathrm{d}z \, \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)} \; . \tag{2}$$
   (a) Si studi il modulo della funzione integranda sui lati del quadrato e si dimostri che $\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$.
   (b) Si usi il risultato precedente e quelli del primo esercizio per sommare la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

3. Dato un generico spazio di Hilbert $\mathbb{H}$.
   (a) Usando la definizione di norma di un operatore $\hat{X}$,
$$\|\hat{X}\| = \sup_{\psi\in\mathbb{H}} \frac{\|\hat{X}\psi\|}{\|\psi\|} \; ,$$
   si provi che gli operatori $|\phi_1\rangle\langle\phi_2|$, con $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$, hanno norma pari a $\|\phi_1\| \, \|\phi_2\|$.
   (b) Data una successione di vettori normalizzati $\{|\psi_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{H}$ convergente a $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ provare che la successione di proiettori $P_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ converge in norma a $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, cioè che
$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n - P\| = 0 \; .$$