

Metodi Matematici della Fisica

Scritto III A.A. 2013-2014

1. Si calcoli il residuo all'infinito della seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1 + z^6}{z^3(z - 1/2)(z - 2)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

2. Si calcoli il seguente integrale di funzione reale:

$$I = \int_0^{2\pi} dx \frac{\cos(3x)}{5 - 4 \cos x}. \quad (2)$$

3. Sia \mathbb{H} uno spazio di Hilbert e $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ un funzionale lineare non nullo e continuo su \mathbb{H} , cioè tale che

$$|f(\psi)| \leq F \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathbb{H}, \quad F = \sup_{\psi \in \mathbb{H}} \frac{|f(\psi)|}{\|\psi\|}.$$

- (a) Si provi che il kernel di f $\mathbb{K}_f = \{\phi \in \mathbb{H} : f(\phi) = 0\}$, è chiuso e diverso da \mathbb{H} .
- (b) Sia ψ_0 un vettore ortogonale a \mathbb{K}_f ; considerando il vettore

$$\mathbb{H} \ni \phi = \psi f(\psi_0) - \psi_0 f(\psi)$$

si trovi il vettore ϕ_f tale che

$$f(\psi) = \langle \phi_f | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathbb{H}. \quad (3)$$

- (c) Si provi che ϕ_f è l'unico vettore di \mathbb{H} tale che l'eguaglianza (3) è soddisfatta.
- (d) Si provi che $F = \|\phi_f\|$.