

Metodi Matematici della Fisica

Scritto I A.A. 2013-2014

1. Data la funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z-1}, \quad (1)$$

la si sviluppi in serie di potenze attorno ai punti $z = 1$ e $z = -1$ e si discutano le caratteristiche delle due serie.

2. Si calcoli con i metodi dell'analisi complessa il seguente integrale:

$$I = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{1}{1+x^2}. \quad (2)$$

3. Sia $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale completa in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Si provi che

- (a) la seguente serie definisce un vettore in \mathcal{H} ,

$$|z\rangle = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad (3)$$

- (b) se a è un operatore su \mathcal{H} tale che $a|z\rangle = z|z\rangle$ allora $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ per ogni $|n\rangle$.