Funzioni analitiche: esercizi

1. **Potenze complesse, curve e regioni nel campo complesso**

   (a) Si scrivano i valori possibili di $\sqrt[3]{i}$.

   (b) Si scrivano i valori possibili di $\mathrm{Log}(-i - \sqrt{3}\, i)$, dove Log indica la determinazione principale del logaritmo.

   (c) Si scrivano tutti i valori di $(1+i)^i$.

   (d) Si trovino i possibili valori di $2\log(1-i)$.

   (e) Si trovino i possibili valori di $\log(1-i)^2$. Coincidono con quelli ottenuti al punto precedente?

   (f) Si trovino i possibili valori di $f(z) = \mathrm{Arctg}(1-i)$, dove Arctg designa la determinazione principale come al punto (1.c).

   (g) Si trovi il valori di $\mathrm{Log}(2-3i)$.

   (h) Si trovi il valore di $\tanh\left(\log 3 + \frac{i\pi}{4}\right)$.

   (i) Si trovino i possibili valori di $\arccos(i)$.

   (j) Si trovino i valori di $z \in \mathbb{C}$ tali che $(z^*)^n = 2^{n-1}\, z$.

   (k) Si trovi il luogo geometrico dei valori $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z-3i| < 2$.

   (l) Si trovi il luogo geometrico dei valori $z \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{z+i}{z-i} = 0$.

   (m) Si descriva la curva nel piano che rappresenta il luogo geometrico dei valori complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z-1| + |z+1| = 4$.

2. **Sviluppi in serie di Taylor e Laurent**

   (a) Trovare la funzione $f(z)$ corrispondente alla serie di funzioni

   $$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)$$

   nel dominio $\mathcal{R}e(z) > -1/2$.

   (b) Sviluppare in serie di Taylor la funzione

   $$f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$$

   intorno di $z = 3$ e se ne descriva il cerchio di convergenza uniforme.

(c) Si sviluppi in serie di potenze la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$$

intorno a $z = 2$ e $z = \infty$ e se ne scrivano i corrispondenti residui.

(d) Si sviluppi in serie di potenze la funzione

$$f(z) = \frac{1}{2z - z^2}$$

intorno a $z = 0$, $z = 2$ e $z = \infty$ e se ne scrivano i corrispondenti residui.

(e) Determinare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{z}{1 + z^2}$$

e sviluppare $f(z)$ nel loro intorno e nell'intorno di $z = 0$ calcolandone i residui. Caratterizzare il punto all'infinito calcolandone il corrispondente residuo.

(f) Calcolare i residui nei punti singolari della funzione

$$f(z) = z \cos\left(\frac{1}{1+z}\right) \ .$$

(g) Si sviluppi la funzione

$$f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$$

intorno a $z = -1$ e se ne scriva il corrispondente residuo.

(h) Si sommi, all'interno del suo cerchio di convergenza uniforme, la serie

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+2) z^k \ .$$

(i) Si sommi, all'interno del suo cerchio di convergenza uniforme, la serie

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k+2} \, z^k \ .$$

(j) Si sviluppi in serie di Taylor la funzione

$$f(z) = \log \frac{1-z}{1+z}$$

intorno di $z = 0$ e se ne descriva il cerchio di convergenza uniforme.

(k) Si sviluppi la funzione

$$f(z) = \sqrt{\frac{z-2}{z+2}}$$

intorno a $z = i$ e $z = \infty$ calcolandone i rispettivi residui.