Geometria dello Spaziotempo

Stefano Ansoldi

Dipartimento di Fisica Teorica

Università degli Studi di Trieste

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2002/2003

Premesse algebriche.

Strutture su uno spazio vettoriale:

1. cenni sulle applicazioni k-lineari alternanti su uno spazio vettoriale; base e dimensione dello spazio delle k-forme lineari alternanti ed alcuni isomorfismi canonici; prodotto esterno di forme; algebra esterna su uno spazio vettoriale;
2. cenni all'algebra tensoriale su uno spazio vettoriale; dimensione e base dello spazio dei tensori di tipo (r, s); tensori simmetrici ed antisimmetrici; simmetrizzazione ed anti-simmetrizzazione di tensori; forme come tensori totalmente antisimmetrici;
3. orientazione e scelta di un'orientazione;
4. prodotto scalare.

Premesse di geometria differenziale.

1. Cenni descrittivi al concetto di spazio topologico, insiemi aperti, topologia.
   Ricoprimenti, ricoprimenti aperti, ricoprimenti aperti localmente finiti, raffinamenti; spazi topologici compatti e paracompatti.
2. Struttura differenziabile e varietà differenziabile; funzioni e mappe (differenziabili) su/tra varietà; curve (differenziabili) su varietà.
3. Partizione differenziabile dell'unità; esistenza di partizioni differenziabili dell'unita (enunciato).
4. Vettore tangente e spazio tangente; differenziale di una funzione in un punto, vettore cotangente e spazio cotangente; base di coordinate nello spazio tangente e nello spazio cotangente; componenti di un vettore tangente e di uno cotangente; cambiamento di base negli spazi tangente e cotangente e legge di trasformazione per le componenti; cambiamento di coordinate e cambiamento di base di coordinate negli spazi tangente e cotangente e legge di trasformazione per le componenti.
5. Spazio delle k-forme in un punto; cambiamento di base e legge di trasformazione per le componenti.
   Spazio dei tensori in un punto; cambiamento di base e legge di trasformazione per le componenti.
6. **Strutture su varietà:**
   (a) fibrato vettoriale, fibrato tangente, fibrato cotangente, algebra esterna, fibrato tensoriale; fibrati come varietà differenziabili e loro dimensione; significato della locale trivialità di un fibrato; parallelizzabilità; sezioni di fibrati;
   (b) campi di vettori su insiemi aperti e lungo una curva, loro differenziabilità; scrittura di un campo di vettori in un intorno di coordinate; campi di vettori differenziabili e loro caratterizzazione; spazio dei campi di vettori differenziabili su una varietà; curva integrale di un campo di vettori, sua esistenza ed unicità (enunciato); cenni al flusso associato ad un campo di vettori (definizione);

(c) campi di tensori/forme su insiemi aperti e lungo una curva; scrittura di un campo di tensori/forme in un intorno di coordinate; campi di tensori/forme differenziabili e loro caratterizzazione; spazio dei campi di tensori/forme differenziabili su una varietà; il differenziale di una funzione come 1-forma differenziabile sulla varietà.

7. Operazione di derivazione esterna: esistenza ed unicità (enunciato), proprietà.

8. Mappe tra varietà e applicazioni ad esse associate: *pull-back* e *push-forward*; il caso speciale dei diffeomorfismi; *pull-back* e derivata esterna, proprietà.

9. Derivata di Lie di un campo di vettori; espressione in una base di coordinate della derivata di Lie di un campo di vettori; estensione della derivazione di Lie a forme e, in generale, a tensori e sua espressione in coordinate; derivata di Lie di un campo di vettori e parentesi di Lie.

10. Orientazione di una varietà differenziabile, significato e sua caratterizzazione (enunciato).

11. Integrazione su varietà; definizione locale di integrale; espressione locale dell'integrale in coordinate e sua indipendenza dal sistema di coordinate; definizione globale di integrale tramite la partizione dell'unità; indipendenza dell'integrale dalla partizione dell'unità scelta; teorema di Stokes; corollario al teorema di Stokes.

12. Metrica Riemanniana e Lorentziana; varietà Riemanniana e Lorentziana; Teorema di esistenza della metrica Riemanniana su una varietà; definizione di isometria tra varietà.
    Elemento di volume naturale su una varietà, sua espressione in coordinate tramite il tensore di Levi-Civita.

13. Connessione in un punto e su una varietà; proprietà della connessione e sua scrittura locale tramite i simboli di connessione; derivazione covariante di un campo di vettori e derivazione covariante di un campo di vettori lungo una curva; campo di vettori parallelo lungo una curva; condizione di compatibilità per una connessione su una varietà Riemanniana; condizioni necessarie e sufficienti per la compatibilità di una connessione su una varietà Riemanniana; connessione simmetrica; caratterizzazione di una connessione simmetrica in una base di coordinate e proprietà dei simboli di connessione ad essa associati; teorema di esistenza ed unicità della connessione simmetrica compatibile con la metrica Riemanniana.
    Estensione del concetto di derivazione covariante a tensori/forme.

14. Relazioni tra le operazioni di derivazione covariante, derivazione di Lie e derivazione esterna su una varietà.
    Simmetrie su una varieta, campi di vettori di Killing ed equazione di Killing.

15. Curve auto-parallele e geodetiche; parametrizzazione affine; scrittura locale dell'equazione delle geodetiche per una parametrizzazione affine; teorema di esistenza ed unicità delle geodetiche (enunciato) e

definizione della mappa esponenziale; differenziale della mappa esponenziale; mappa esponenziale come diffeomorfismo locale; cenni ai sistemi normali di coordinate.

16. La curvatura: i tensori di Riemann e Ricci e le loro proprietà; espressione in coordinate del tensore di Riemann; tensori di Riemann e Ricci per la connessione simmetrica compatibile: ulteriori proprietà, scalare di Ricci e tensore di Einstein.

Spaziotempo, Relatività speciale e generale.

1. Sul principio speciale di relatività; sistemi di riferimento inerziali, principio di relatività, principio di costanza della velocità della luce e loro base sperimentali.
   Significato fisico delle proposizioni geometriche, definizione operativa dei concetti fisici e analisi del concetto di simultaneità dal punto di vista della sua definizione operativa.
   Risoluzione della contraddizione tra principio di relatività nel senso ristretto e principio di costanza della velocità della luce: cenni alle equazioni di trasformazione di Lorentz.
2. Struttura dello spaziotempo in relatività speciale: coni luce, segnali, osservatori inerziali.
3. Sul principio generale di relatività; ambiguità e difficoltà nella definizione di sistemi di riferimento inerziali; sistemi generali di coordinate.
   Il principio di equivalenza nel senso debole e l'*esperimento dell'ascensore* di Einstein; equivalenza (*locale*) tra campi gravitazionali uniformi e campi inerziali; sistemi di coordinate *gaussiani*, descrizione di proprietà fisiche tramite proprietà geometriche del continuo spaziotemporale; relazione tra principio generale di relatività, principio di equivalenza di Einstein e teoria del campo gravitazionale.
   Relazione tra definizione operativa dei concetti di spazio e tempo, invio di segnali e struttura causale dello spaziotempo.
   Cenni alle verifiche sperimentali dei principi della relatività generale e alle sue previsioni.
4. Costruzione di un sistema di osservatori uniformemente accelerati nello spazio tempo di Minkowski e loro proprietà: red-shift, orizzonte degli eventi e struttura causale dello spaziotempo per un osservatore accelerato nello spaziotempo di Minkowski; coordinate di Rindler, elemento di linea in coordinate di Rindler e sua relazione con l'elemento di linea di Minkowski; interpretazione dello spaziotempo di Rindler alla luce dell'esperimento dell'ascensore di Einstein.

Il tensore energia impulso.

1. Formulazione Lagrangiana per la dinamica non-relativistica di una particella; principio di conservazione dell'energia.
2. Cenni di cinematica relativistica: l'azione per il moto libero di una particella relativistica; principio variazionale ad estremi fissi e determinazione dell'equazione del moto; principio variazionale con un estremo variabile e definizione di impulso; tensore momento angolare

relativistico e significato delle sue componenti in relazione al gruppo delle trasformazioni di Lorentz (interpretate come rotazioni dello spaziotempo); centro di massa relativistico.

3. Cenni alla formulazione Lagrangiana di una teoria di campo (e caso particolare di una teoria Lorentz invariante) tramite principio variazionale: equazioni di Eulero-Lagrange; definizione del tensore energia-impulso associato ai campi e legge locale di conservazione; simmetria del tensore energia-impulso ed interpretazione delle sue componenti; leggi di conservazione in forma integrale e relazione relativistica tra densità del flusso di energia e densità di impulso.
4. Definizione del tensore energia-impulso per una teoria di campo covariante generale; legge di conservazione in forma locale; interpretazione della legge locale di conservazioni alla luce dell'invarianza per diffeomorfismi; quantità conservate in presenza di simmetrie (vettori di Killing) e discussione sulle leggi integrali di conservazione nel caso covariante generale; interpretazione del caso Lorentz invariante, alla luce di queste considerazioni, come caso particolare.

Equazioni di Einstein.

1. Derivazione *euristica* delle equazioni di Einstein in uno spaziotempo statico sfruttando l'analisi del limite di campo debole.
2. Equazioni di Einstein (in due forme equivalenti); non linearità delle equazioni e aspetti particolari del legame con la materia.
   Cenni all'analisi della struttura delle equazioni di Einstein e loro caratterizzazione con riferimento al problema di Cauchy ad esse associato.
3. Il tensore metrico e la relazione delle sue componenti con le proprietà del campo gravitazionale e del sistema di riferimento scelto; relazione tra componenti del tensore metrico e possibilità di sincronizzazione di orologi.
4. Limite classico delle equazioni di Einstein e limite classico dell'equazione delle geodetiche. Significato fisico dei coefficienti di connessione e del tensore metrico dedotto dall'analisi del limite classico delle equazioni.

Cenni di struttura dello spaziotempo su larga scala.

1. Classificazione del carattere dei vettori su una varietà Lorentziana; classificazione del carattere di una curva in un punto; caratterizzazione generale di curve tipo spazio, tempo, luce o causali.
2. Classificazione delle geodetiche ed invarianza del loro carattere.
3. Formulazione matematica dello spaziotempo come varietà Lorentziana; interpretazione fisica di concetti geometrici legati al concetto di varietà: mappa esponenziale, geodetiche, sistemi normali di coordinate alla luce dei concetti fisici di moto libero, struttura causale e del principio di equivalenza.
4. Cenni alla definizione di buco nero dal punto di vista della struttura causale (introduzione ai seguenti concetti fondamentali e loro significato fisico, senza dimostrazioni):

- curve tipo tempo, spazio, luce, causali dirette verso il passato/futuro; punto terminale nell passato/futuro di una curva causale; curve causali che non possono essere estese nel passato/futuro;
- passato/futuro cronologico e causale di un evento e di un insieme di eventi;
- spaziotempo causale nel senso forte;
- insieme atemporale e bordo di un insieme atemporale; dominio di dipendenza passato/futuro di un insieme atemporale chiuso; dominio di dipendenza di un insieme atemporale chiuso; superficie di Cauchy e superficie di Cauchy parziale; spaziotempo globalmente iperbolico;
- spaziotempo asintoticamente vuoto e semplice e spazio non fisico ad esso associato; proprietà di uno spaziotempo asintoticamente vuoto e semplice: futuro e passato tipo luce e loro caratterizzazione in termini di geodetiche; spaziotempo asintoticamente vuoto e semplice nel senso debole;
- spaziotempo determinabile asintoticamente verso il futuro nel senso forte a partire da una superficie di Cauchy parziale; sue proprietà;
- buco nero;
- orizzonte degli eventi.